UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Seminário de Iniciação Científica
Universidade do Estado de Santa Catarina
26° SIC UDESC

O VOLUME DA ESFERA: DE ARQUIMEDES A INTEGRAL

Polyana Benk [1], Elisandra Bar de Figueiredo [2], Ivanete Zuchi Siple [3]

[1] Acadêmica do Curso de licenciatura em matemática CCT - bolsista PROIP/UDESC.
[2] Orientador, Departamento de matemática CCT – elis.b.figueiredo@gmail.com
[3] Orientador, Departamento de matemática CCT – ivazuchi@gmail.com

Palavras-chave: Voluma da Esfera. História. Matemáticos.

Nosso trabalho consistiu em pesquisar demonstrações do volume da esfera apresentadas ao longo da história por vários matemáticos. Começamos com os trabalhos de Arquimedes, seguimos para o método de Cavalieri, as somas de Riemann e finalizamos com a integral definida.

Segundo Eves (2011), Arquimedes determinava áreas e volumes cortando-os em tiras planas ou fatias paralelas finas que pendurava na extremidade de uma alavanca e equilibrava com áreas ou volumes conhecidos. Para o volume da esfera ele usou um cilindro e um cone. Porém, Arquimedes não se satisfazia com esse método, recorrendo "ao método da exaustão para fornecer uma demonstração mais rigorosa" (EVES, 2011, p.423). Então, ele, fez uma demonstração matemática por dupla redução ao absurdo, ou seja, ele supôs o volume encontrado no método anterior como verdadeiro e mostrou que aquela igualdade teria que ser verdadeira, pois o volume da esfera não poderia ser menor nem maior que aquele valor. Tal demonstração pode ser encontrada no livro *works of archimedes* (HEATH, 1897).

No século XVII, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) estabeleceu um método para determinar volumes (e áreas) conhecido como princípio de Cavalieri: "Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante." (EVES, 2004, p.426). Para determinar o volume da esfera usando esse método devemos compará-la a anticlépsidra de mesma altura. Sendo assim basta mostrar que fazendo um corte a uma altura h da esfera e da anticlépsidra esses cortes tem seções de mesma área, como ilustra a Figura 1.

Fig. 1 *corte na altura h*

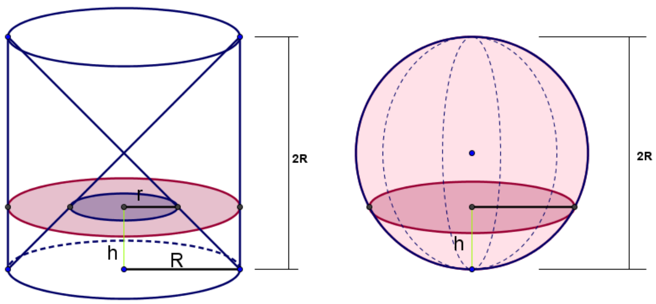
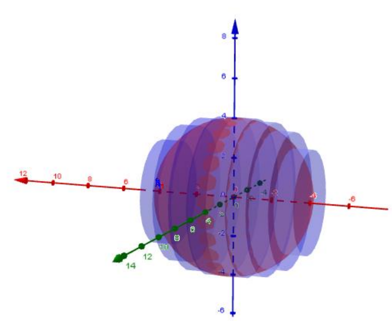


Fig 2 *partição em cilindros achatados*



Fonte: produção das autoras

No século XIX, temos a somas de Riemann (1826-1866) que geometricamente constituem uma aproximação para o cálculo de áreas e volumes, no caso da esfera particionamos em n cilindros achatados com altura $\Delta x = \frac{2r}{n}$, como ilustra a Figura 2. Somando o volume desses cilindros obtemos uma aproximação para o volume da esfera S dada por:

$$V(S) \cong \sum_{i=1}^{n} \pi\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \Delta x.$$

Intuitivamente essa soma será uma melhor aproximação quando a altura dos cilindros tender a zero, ou seja, n tender ao infinito.

Por fim, temos a integral de Riemann definida dada como o limite das somas de Riemann $V(S) = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx$. Assim, basta fazer o cálculo da integral simples para encontrarmos o volume da esfera. Podemos também utilizar integrais duplas e triplas para calcular o volume da esfera.

Podemos ver que de Arquimedes até a integral temos um avanço na forma de demonstrar o volume da esfera, pois a matemática em si teve um avanço:

> Pelo método de equilíbrio pode-se ver a fertilidade da ideia que consiste em considerar toda grandeza como sendo formada de um número muito grande de porções atômicas, embora essa ideia não tenha uma fundamentação precisa. É desnecessário dizer que, com o moderno método dos limites, pode-se fazer com que o método de equilíbrio de Arquimedes se torne perfeitamente rigoroso, confundindo-se, em essência, com a moderna integração. (EVES, 2011, p.423-424)

Com esse estudo podemos ver que o volume da esfera pode ser explorado em diferentes níveis de ensino e com abordagens diferenciadas, levando em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes e possibilitando a ampliação de tais conhecimentos.

Referências:

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**, tradução Hygino H. Domingues, Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 2011.

HEATH, Thomas Little. **The Works of Archimedes.** Londres: Cambridge University Press, 1897.