UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Seminário de Iniciação Científica
Universidade do Estado de Santa Catarina
26° SIC UDESC

CAOS E PERIODICIDADE NO MODELO DE BAIER-SAHLE A TEMPO DISCRETO

Angela da Silva[1], Paulo Cesar Rech[2]

[1] Acadêmica do Curso de Licenciatura - CCT - bolsista PIBIC/CNPq
[2] Orientador, Departamento de Física - CCT - paulo.rech@udesc.br

Palavras-chave: Fluxo de Baier-Sahle. Método de Euler. Adição de período.

O objetivo da pesquisa foi investigar um sistema dinâmico discreto, descrito por um mapa n-dimensional, que é derivado do sistema de Baier-Sahle a tempo contínuo, pelo uso do método de Euler. Mostramos que para $n = 3$, são observadas estruturas periódicas imersas numa região de quase periodicidade, as quais são similares às línguas de Arnold e organizadas numa sequência de adição de períodos. Mostramos também que, para $n > 3$, as trajetórias no espaço de fase são sempre não limitadas.

O fluxo de Baier-Sahle é um modelo matemático a tempo contínuo, n-dimensional, não-linear, não associado com qualquer sistema real da natureza e dado por

$$\dot{x}_1 = -x_2 + ax_1$$
$$\dot{x}_m = x_{m-1} - x_{m+1}$$
$$\dot{x}_n = c + bx_n\,(x_{n-1} - d)$$

onde $n > 3,\ m = 2,\ldots,\ n\text{-}1$, x_i representa as variáveis, e $a > 0$, b, c, d são parâmetros reais. Aplicando o método de discretização de Euler, chegamos ao resultado

$$x_1^{(t+1)} = x_1^{(t)} + \delta(-x_2^{(t)} + ax_1^{(t)})$$
$$x_m^{(t+1)} = x_m^{(t)} + \delta(x_{m-1}^{(t)} - x_{m+1}^{(t)})$$
$$x_n^{(t+1)} = x_n^{(t)} + \delta(c + bx_n^{(t)}(x_{n-1}^{(t)} - d))$$

em que δ é o passo de integração e $t = 0,1,2,\ldots$, é o tempo discreto.

Neste mapa, investigamos o espaço de parâmetro bidimensional (a, δ) do sistema de Baier-Sahle, a tempo discreto com $-0.17 \leq a \leq -0.10$, $0.10 \leq \delta \leq 0.20$, e os outros três parâmetros fixados em $b = 5.0$, $c = 0.2$ e $d = 2.2$. A figura 1 mostra uma visão global do espaço de parâmetro (a, δ). Foi gerada pela discretização do espaço de parâmetros numa malha de $10^3 \times 10^3$ pontos. Para cada ponto do espaço de parâmetro (a, δ), uma orbita de condição inicial (xo, yo, zo) = (0,1234, 0,35, 0,65) converge para um atrator caótico, ou para quase periodicidade, ou para um atrator periódico, ou para um atrator no infinito, depois de um transiente de 2×10^6 iteradas.

Na figura 1 pode ser vista a complexidade da alternação dos vários comportamentos coexistente no espaço de parâmetros do sistema em estudo. Em relação à linha de fronteira NS, entre a região de período-1 em azul e a região de quase periodicidade em amarelo, para pontos pertencentes à ela ocorre bifurcação de Naimark-Sacker, que é caracterizada por um par de autovalores complexo-conjugados de módulo 1. Como consequência, a região amarela indica parâmetros que conduzem o sistema para movimento quase periódico. O movimento caótico ocorre longe desta mesma linha de fronteira NS, para pontos pertencentes à região preta.A vasta região branca na figura 1 corresponde a parâmetros relacionados a atratores não limitados no espaço de fase, portanto, uma região de divergência. Assim, na região amarela, soluções quase periódicas surgem após uma bifurcação de Naimark-Sacker resultante da desestabilização de um ponto fixo. Na linha da fronteira azul-amarelo na figura 1, uma órbita de período 1 desaparece, para dar lugar a uma curva fechada invariante, que é característica do movimento quase periódico. Conforme nos movemos para longe da linha da fronteira NS, na região amarela, atingimos a região caótica em preto. Isso é um exemplo da rota para o caos via quase periodicidade, que é ilustrada na figura 2, que mostra quatro projeções no eixo *xy*, das trajetórias no espaço de fase *xyz.* Cada uma delas é relacionada com cada um de quatro pontos ao longo da linha tracejada $a = -0.13$ na figura 1. Cada uma das trajetórias no espaço de fase foi gerada com 5 mil pontos e a condição inicial e o transiente foram os mesmos usados para gerar a figura 1. São mostrados na figura 2 uma solução de período-1 em azul para $\delta = 0.12$, uma solução quase periódica em amarelo para $\delta = 0.15$, uma solução de período 40 em vermelho para $\delta = 0.1578$ e uma solução caótica em preto para $\delta = 0.1595$.

Em resumo, realizamos simulações numéricas em um sistema *n*-dimensional a tempo discreto. Mostramos que um espaço de parâmetros bidimensional exibe uma rica dinâmica, onde podem ser vistas estruturas imersas em uma região de quase periodicidade. Essas estruturas são similares as línguas de Arnold, sendo organizadas em uma sequencia de adição de períodos. Investigamos também o sistema discreto para outros valores de *n*, a saber $n = 4,...,9$. Para todos esses casos estudados, as trajetórias no espaço de fase são não limitadas, ou seja, essas trajetórias divergem.

Fig. 1 ***Espaço de Parâmetros (a, δ).***

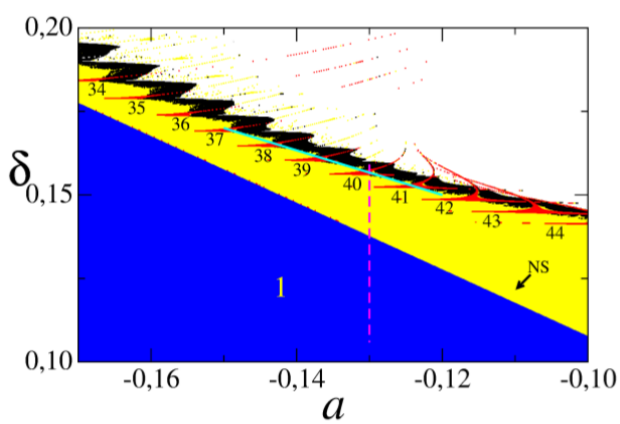

Fig. 2 ***Atratores no Espaço de Fase.***