DINÂMICA DE SISTEMAS NÃO-LINEARES DESCRITOS POR EQUAÇÕES ESTOCÁSTICAS: SISTEMA REGULADOR DE WATT

Holokx Abreu Albuquerque[1], Lucas Alexandre Souza Rosa [2]

[1] Orientador, Departamento de Física CCT-UDESC – holokx.albuquerque@udesc.br
[2] Acadêmico(a) do Curso de Física CCT-UDESC – bolsista PROBIC/UDESC

Palavras-chave: Sistema Regulador de Watt, espaço de parâmetros, estruturas de bifurcação, estabilidade.

Uma máquina a vapor, símbolo da Revolução Industrial, funciona a partir de aquecimento da água, produzindo vapor que exerce pressão sobre um mecanismo de transmissão que rotaciona um eixo. A velocidade de rotação deste eixo é diretamente proporcional à intensidade de vapor produzido. Por esta velocidade não ser constante, James Watt criou um dispositivo cuja função é regular automaticamente a velocidade angular de um volante acoplado a uma máquina a vapor. Este dispositivo ficou conhecido como Sistema Regulador de Watt.

Estruturas de bifurcação delimitam regiões periódicas imersas em áreas de caos em planos de parâmetros de sistemas dinâmicos. O objetivo deste trabalho é analisar como o sistema tridimensional "regulador de Watt" perde estabilidade, mediante o estudo das estruturas de bifurcação deste sistema.

Um sistema dinâmico é um conjunto de estados possíveis, juntamente com as leis que determinam os estados, passado e futuro, a partir do conhecimento do estado presente. Se estas leis são invariáveis em relação ao tempo, o comportamento do sistema pode ser considerado completamente definido pelo seu estado inicial. O tempo em um sistema dinâmico pode ter uma variação contínua (fluxo) ou assumir valores discretos inteiros (mapa). O Sistema Regulador de Watt é representado por um sistema de equações diferenciais, sendo assim considerado um sistema contínuo. O sistema de equações diferenciais é:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = z^2 sinx cosx - sinx - \varepsilon y, \\ \frac{dz}{dt} = \alpha(cosx - \beta). \end{cases} \qquad (1)$$

O espaço de fase é formado pelas variáveis do sistema, (x,y,z) no caso do Regulador de Watt, por se tratar de um sistema tridimensional. À medida que o tempo evolui aparecem atratores na trajetória traçada. Os atratores são conjuntos invariantes para o qual a trajetória converge após um tempo suficientemente longo. Os tipos são: ponto de equilíbrio estável, para o qual o comportamento do sistema converge e independe do tempo; ciclo limite, que consiste em um conjunto de valores para o qual o sistema converge, apresentando um comportamento periódico; torus, exibindo um comportamento quase periódico, ou seja, órbitas nunca se repetem, porém não tem sensibilidade às condições iniciais; caótico, apresentando um sistema aperiódico, com órbitas que nunca se repetem, e sensível às condições iniciais.

De acordo com a equação (1), as equações que descrevem o movimento do Sistema Regulador de Watt podem ser escritas em termo dos parâmetros $(\alpha,\beta,\varepsilon)$. Os espaços de parâmetros podem ser utilizados para analisar o comportamento de um sistema, fixando um parâmetro e variando os outros dois.

Ao variar os parâmetros de um sistema de equações, a sua estrutura qualitativa pode mudar. Podem aparecer ou desaparecer pontos de equilíbrio, ou sua estabilidade pode ser alterada. Estas mudanças qualitativas são denominadas pontos de bifurcações. O número de codimensão da bifurcação corresponde ao número mínimo de parâmetros que devem ser variados para identificá-la. As bifurcações podem surgir a partir de pontos de equilíbrio ou de ciclos limite. A Hopf, de codimensão 1, é um exemplo de bifurcação de equilíbrio, a qual implica no surgimento de um ciclo limite. A bifurcação de dobramento de período, também de codimensão 1, torna o ciclo limite original instável ao submetê-lo a uma família de soluções de período duplicado.

A integração numérica fornece muitas informações sobre o comportamento de um sistema dinâmico, mas só pode ser aplicada em sistemas de baixa ordem. Para tempos computacionais mais longos, uma alternativa é o método de continuação numérica: técnica para computar consecutivas sequências de pontos que se aproximam de um ramo desejado. Esta técnica é construída mediante dois passos de algoritmo: predição, o qual fornece uma primeira estimativa do próximo ponto da curva de solução; correção, responsável por encontrar a solução, partindo do resultado da predição.

Neste trabalho utilizou-se o MatCont para obter as curvas de bifurcação do Sistema Regulador de Watt. Este software é uma coleção de algoritmos numéricos implementados como um conjunto de ferramentas para o Matlab para a detecção, continuação e identificação de ciclos limite e diversos tipos de bifurcações. A análise dos resultados obtidos por este é complementar à simulação dos sistemas e permite maior compreensão do comportamento presente nos sistemas dinâmicos. Inicialmente, escolheu-se um ponto aleatório em uma região periódica. Obteve-se então um ponto de equilíbrio estável. A partir deste, variou-se o parâmetro ε para obter a bifurcação de Hopf. Partindo desta, foi possível variar os parâmetros α e ε e obter a curva que fornece a família de pontos onde existe neste tipo de bifurcação (Fig. 1). Utilizando a mesma como ponto inicial, variou-se agora o parâmetro α para encontrar um dobramento de período, e então foi repetido o procedimento anterior com os parâmetros α e ε, obtendo a curva desta bifurcação (Fig. 2). Comparando com a simulação deste sistema, nota-se que esta curva está aproximadamente sobre uma região caótica, confirmando que há perda de estabilidade do sistema. Na sequência deste trabalho espera-se obter outras estruturas de bifurcação, para que seja possível fazer uma análise mais detalhada de como o Sistema Regulador de Watt tem seu estado de estabilidade alterado.

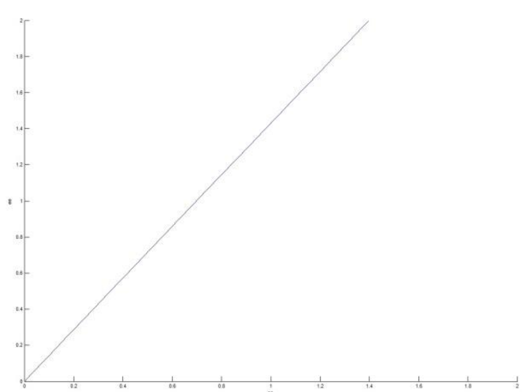

Fig. 1 *Curva de bifurcação de Hopf.*

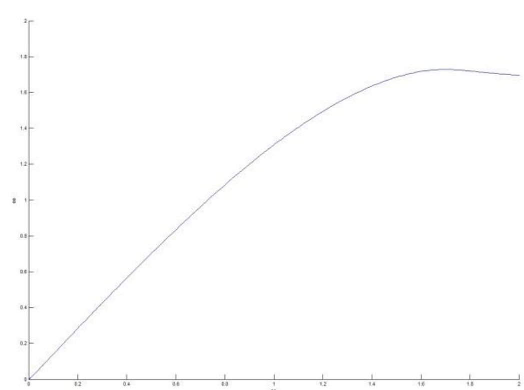

Fig. 2 *Curva de bifurcação de Dobramento de Período.*