

CONCEITO DE INTEGRAIS IMPRÓPRIAS E SUAS RELAÇÕES COM O ENSINO E AS INTEGRAIS DE RIEMANN E HENSTOCK-KURZWEIL.

Ivanete Zuchi Siple¹, Jaqueline Valle², Elisandra Bar de Figueiredo³

¹ Orientador, Departamento de Matemática – DMAT-CCT– ivazuchi@gmail.com .

² Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática - bolsista PROBIC/UDESC.

³ Professor Participante do Departamento de Matemática – DMAT-CCT

Palavras-chave: Integral Imprópria. Ensino. Integral de Riemann. Integral de Henstock-kurzweil.

Esse projeto de iniciação científica está inserido no projeto de pesquisa “Integral definida: de Arquimedes à Lebesgue”, o qual visa fundamentar o conceito de funções integráveis, permeando do método de exaustão à definição da integral de Lebesgue, buscando-se estabelecer aplicações entre teoria e prática. Nesse contexto estudamos acerca da integral imprópria tendo como objetivo estudar a definição e propriedades com foco no ensino desse conceito.

A metodologia contemplou um estudo do referencial teórico pertinente à construção do conceito da integral, definição e propriedades da integral de Riemann. Na análise das condições necessárias para que uma função seja Riemann integrável reside o problema de pesquisa explorado nesse trabalho: o conceito de integral imprópria, o qual contempla as funções descontínuas e ilimitadas. Essas funções não necessariamente apresentam as condições necessárias para a análise através da integral de Riemann. Sendo assim, com o objetivo de investigar como essa integral é abordada no contexto de ensino, analisamos alguns livros didáticos. Por fim estudamos a integrabilidade dessas funções no campo da integral de Henstock-kurzweil (HK).

Por meio de nosso levantamento histórico da integral observamos que somente no século XIX a integral passou a ser definida em termos de somas de infinitas parcelas infinitesimais, feito atribuído aos matemáticos Cauchy (1789-1857) e Riemann (1826-1866), porém a definição de integral proposta por esses matemáticos está associada com o conjunto de funções limitadas, sendo assim surge uma das restrições a essa definição em problemas de funções que não são limitadas em um ponto do intervalo de integração ou quando investigamos a integração num intervalo infinito. Temos também que o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) é válido para a classe de funções contínuas num intervalo fechado.

É necessária então uma abordagem diferenciada para lidar com esses casos especiais de funções que não se encaixam nas classes citadas acima, as integrais impróprias. Porém, em nossa experiência como docentes e discentes do curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de Cálculo observamos que o aluno, muitas vezes, resolve a integral imprópria usando a aplicação direta do TFC.

Frente a esse fato a nossa hipótese é que há uma conexão frágil, apresentada nos referenciais didáticos, entre os conceitos da integral definida e da integral imprópria. Assim, levantamos os seguintes questionamentos: Essas funções podem ser consideradas Riemann Integráveis? Como é possível aplicar o TFC para resolver esses problemas? Como abordar didaticamente, para o aluno, a relação desses problemas com a integral definida?

Para responder essas questões realizamos uma análise em quatro livros didáticos utilizados nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral e um para os cursos de Análise Real, com o objetivo de

verificar qual a abordagem do conceito de integral imprópria apresentada pelos mesmos. Para essa análise utilizamos uma adaptação dos critérios propostos por Barufi (1999) para análise dos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral nos livros didáticos. Concluímos após nossa análise que apenas um dos livros analisados, Um Curso de Cálculo (GUIDORIZZI, 1986), apresenta explicitamente a relação entre a integral definida e a integral imprópria, apontando que uma função que não é limitada em seu intervalo de integração não é Riemann Integrável, mesmo que a aplicação imediata e no caso errônea do TFC gere um resultado, o autor afirma ainda que essa função, mesmo não sendo Riemann integrável pode ser impropriamente integrável. (FIGUEIREDO, VALLE, SIPLE, 2015)

A definição da integral HK (KURZ, SWARTZ, 2004) pode ser aplicada para uma classe mais ampla de funções, nosso foco nesse estudo esteve nos teoremas que nos garantem que não há integrais impróprias HK, de modo que as funções que não são Riemann integráveis, mas são impropriamente integráveis, são de fato HK-integráveis, preenchendo uma das lacunas de funções Riemann integráveis.

Referências

- BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados do curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado USP, 1999.
- FIGUEIREDO, E.B.; VALLE, J.; SIPLE, I. Z. Integral imprópria: a abordagem nos livros didáticos. In: **4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 2015, Ilhéus. Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015. v.4. p. 2578-2589.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 1. Rio de Janeiro. LTC, 2000.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Vol. 2. Rio de Janeiro. LTC, 1986.
- KURTZ, D. S.; SWARTZ, C. K. **Theories of Integration: The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil and McShane**. New York: World Scientific, 2004.
- LIMA, E. L. **Análise Real**. V. 1. 10.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- SILVA, M. O.; CARDIM, N. **Cálculo II**. Volume 2. 2.ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
- STEWART, J. **Cálculo**. Vol. I. 6.ed. São Paulo. Cengage Learning, 2009.